	COLÉGIO PEDRO II – CAMPUS REALENGO II Departamento de Matemática Ensino Médio – 1ª série – 2018

Fórmulas trigonométricas

Mudança de sinal do arco (ou ângulo)

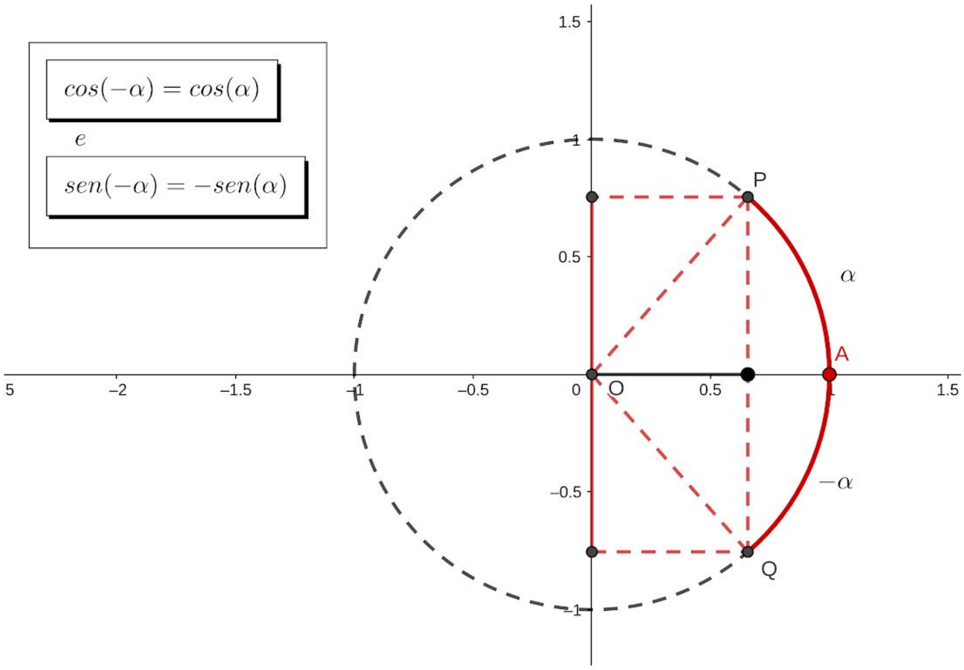
Pretendemos estabelecer a comparação entre as expressões trigonométricas de um arco de medida α (senα, cosα etc.) e as expressões trigonométricas do arco de medida $-\alpha$ (sen($-\alpha$), cos($-\alpha$) etc.). Os arcos de medidas α e $-\alpha$ são chamados *arcos opostos.*

Se o ponto P é extremidade do arco de medida α, é imediato que a extremidade Q do arco de medida $-\alpha$ ocupa uma *posição simétrica de P em relação ao eixo Ox,* já que ambos têm a *mesma origem A.* Resulta, portanto, que os pontos P e Q têm a *mesma abscissa* e *ordenadas opostas*, o que equivale a dizer que os arcos de medidas α e $-\alpha$ têm o mesmo cosseno e senos opostos, isto é:

$$\boxed{cos(-\alpha) = cos(\alpha)}$$

e

$$\boxed{sen(-\alpha) = -sen(\alpha)}$$



A partir dessas conclusões, deduzimos as relações correspondentes às demais razões trigonométricas:

$$\boxed{sen(-\alpha) = -sen(\alpha)}$$

$$\boxed{cos(-\alpha) = cos(\alpha)}$$

$$\boxed{tg(-\alpha) = -tg(\alpha)}$$

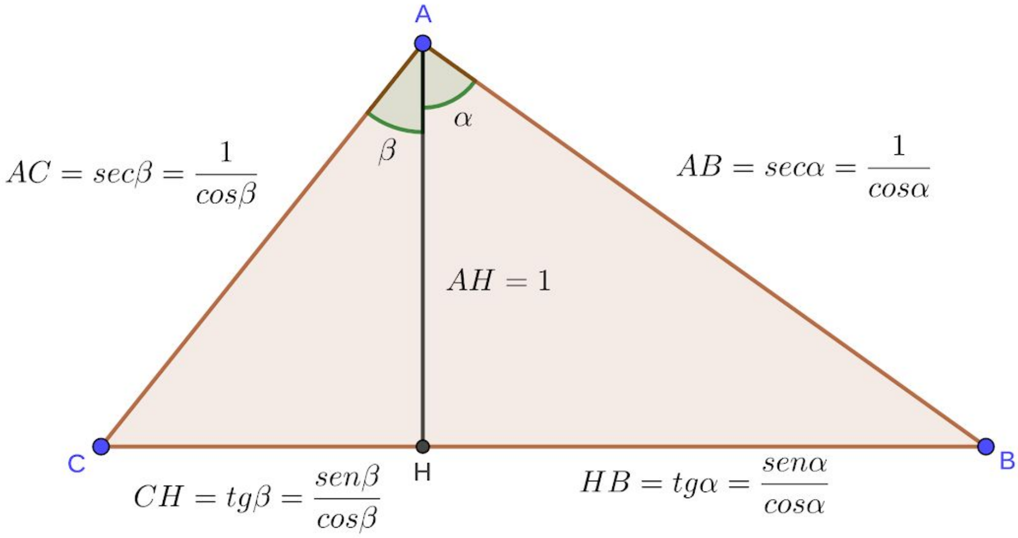
$$cotg(-\alpha) = -cotg(\alpha)$$

$$sec(-\alpha) = sec(\alpha)$$

$$cossec(-\alpha) = -cossec(\alpha)$$

Seno da soma e seno da diferença

Sejam *a* e *b* as medidas de dois arcos quaisquer. Vamos deduzir as expressões de *sen (a+b)* e *sen(a - b)* - *seno da soma e seno da diferença* - em função dos senos e cossenos de ***a*** e ***b***.



Podemos calcular a área *S* do triângulo *ABC* usando as expressões:

$$S_{ABC} = \frac{CB \times AH}{2} \quad ou \quad S_{ABC} = \frac{AB \times AC \times sen(\beta + \alpha)}{2}$$

Igualando as duas expressões, substituindo e simplificando, adequadamente temos:

$$AC \times AB \times sen(\beta + \alpha) = CB \times AH$$

$$AC \times AB \times sen(\beta + \alpha) = (CH + HB) \times AH$$

$$\frac{1}{\cos\beta} \times \frac{1}{\cos\alpha} \times sen(\alpha + \beta) = \left(\frac{sen\beta}{\cos\beta} + \frac{sen\alpha}{\cos\alpha}\right) \times 1$$

$$sen(\alpha + \beta) = \left(\frac{sen\alpha}{\cos\alpha} + \frac{sen\beta}{\cos\beta}\right) \times 1 \times \cos\beta \times \cos\alpha$$

$$sen(\alpha + \beta) = \left(\frac{sen\alpha \times \cos\beta \ + \ sen\beta \times \cos\alpha}{\cos\alpha \times \cos\beta}\right) \times 1 \times \cos\beta \times \cos\alpha$$

Assim:

$$\boxed{sen(\alpha+\beta) = sen\alpha \times cos\beta + sen\beta \times cos\alpha}$$

Para o cálculo de *sen(α - β),* basta fazermos $\alpha - \beta = \alpha + (-\beta)$ e utilizar o *seno da soma*, assim:

$$sen(\alpha-\beta) = sen(\alpha + (-\beta))$$

$$sen(\alpha-\beta) = sen\ \alpha \times \cos(-\beta) + sen(-\beta) \times \cos\alpha$$

$$sen(\alpha-\beta) = sen\ \alpha \times \cos\beta - sen\ \beta \times \cos\alpha$$

Assim:

$$\boxed{sen(\alpha-\beta) = sen\alpha \times cos\beta - sen\beta \times cos\alpha}$$

Cosseno da soma e cosseno da diferença

Sejam *a* e *b* as medidas de dois arcos quaisquer. Vamos deduzir as expressões de *cos (* $\alpha + \beta$ *)* e *cos(* $\alpha - \beta$ *)* - *seno da soma e seno da diferença* - em função dos senos e cossenos de α e β.

Primeiramente sabemos que se dois arcos são complementares, $\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$

Pela fórmula do seno da diferença (deduza), temos a igualdade:

$$sen\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos(\alpha)$$

E a partir da igualdade acima, fazendo $x = \frac{\pi}{2} - \alpha$ temos:

$$sen\ (\tfrac{\pi}{2} - \alpha) = cos(\alpha)$$
$$sen\ (\tfrac{\pi}{2} + x - \tfrac{\pi}{2}) = cos\ (\tfrac{\pi}{2} - x)$$
$$sen\ (x) = cos\ (\tfrac{\pi}{2} - x)$$

Em qualquer caso para qualquer caso:

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = sen(\alpha)$$

Usando as identidades acima, podemos deduzir as fórmulas do cosseno da soma e diferença de arcos, a partir das fórmulas de seno da soma e diferença de arcos.

$$\cos(\alpha+\beta) = sen\left(\frac{\pi}{2} - (\alpha+\beta)\right)$$
$$\cos(\alpha+\beta) = sen\left(\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) - \beta\right)$$
$$\cos(\alpha+\beta) = sen\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \times \cos(\beta) - sen(\beta) \times \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$$
$$\cos(\alpha+\beta) = \cos(\alpha) \times \cos(\beta) - sen(\beta) \times sen(\alpha)$$

Ou seja:

$$\boxed{cos(\alpha+\beta) = cos(\alpha) \times cos(\beta) - sen(\alpha) \times sen(\beta)}$$

Para o cálculo de *cos(* $\alpha - \beta$*),* basta fazermos $\alpha - \beta = \alpha + (-\beta)$ e utilizar o cos*seno da soma*, assim:

$$\cos(\alpha-\beta) = \cos(\alpha + (-\beta))$$
$$\cos(\alpha-\beta) = \cos(\alpha) \times \cos(-\beta) - sen(\alpha) \times sen(-\beta)$$
$$\cos(\alpha-\beta) = \cos(\alpha) \times \cos(\beta) - sen(\alpha) \times (-sen(\beta))$$
$$\cos(\alpha-\beta) = \cos(\alpha) \times \cos(\beta) + sen(\alpha) \times sen(\beta)$$

Temos então:

$$\boxed{cos(\alpha-\beta) = cos(\alpha) \times cos(\beta) + sen(\alpha) \times sen(\beta)}$$

Tangente da soma e tangente da diferença

Sejam *a* e *b* as medidas de dois arcos tais que α, β, $\alpha+\beta$ e $\alpha-\beta$ sejam diferentes de $\frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in Z$. Vamos deduzir as expressões de *tg(*$\alpha+\beta$) *e tg(*$\alpha-\beta$) - tangente da soma e tangente da diferença - em função das tangentes de α e β.

$$tg(\alpha+\beta) = \frac{sen(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)} = \frac{sen\alpha.\cos\beta + sen\beta.\cos\alpha}{\cos\alpha.\cos\beta - sen\alpha.sen\beta}$$

Estrategicamente, dividimos o numerador e, o denominador desta fração por $cos\alpha.cos\beta$:

$$tg(\alpha+\beta) = \frac{\dfrac{sen(\alpha).\cos(\beta)}{\cos(\alpha).\cos(\beta)} + \dfrac{sen(\beta).\cos(\alpha)}{\cos(\alpha).\cos(\beta)}}{\dfrac{\cos(\alpha).\cos(\beta)}{\cos(\alpha).\cos(\beta)} - \dfrac{sen(\alpha).sen(\beta)}{\cos(\alpha).\cos(\beta)}} = \frac{\dfrac{sen(\alpha)}{\cos(\alpha)} + \dfrac{sen(\beta)}{\cos(\beta)}}{1 - \dfrac{sen(\alpha)}{\cos(\alpha)} \times \dfrac{sen(\beta)}{\cos(\beta)}}$$

Temos assim:

$$\boxed{tg(\alpha+\beta) = \frac{tg(\alpha)+tg(\beta)}{1-tg(\alpha).tg(\beta)}}$$

Para o cálculo de *tg (α - β),* basta fazermos α - β = α + (- β) e utilizar a tangente *da soma*, assim:

$$tg(\alpha-\beta) = tg(\alpha+(-\beta))$$

$$tg(\alpha-\beta) = \frac{tg(\alpha)+tg(-\beta)}{1-tg(\alpha).tg(-\beta)}$$

Assim:

$$\boxed{tg(\alpha-\beta) = \frac{tg(\alpha)-tg(\beta)}{1+tg(\alpha).tg(\beta)}}$$

Resumo de soma e subtração de arcos:

$sen\,(a+b) = sen\,(a).cos\,(b) + sen\,(b).cos\,(a)$
$sen\,(a-b) = sen\,(a).cos\,(b) - sen\,(b).cos\,(a)$
$cos\,(a+b) = cos\,(a).cos\,(b) - sen\,(a).\,sen\,(b)$
$cos\,(a-b) = cos\,(a).cos\,(b) + sen\,(a).\,sen\,(b)$
$tg(a+b) = \frac{tg(a)+tg(b)}{1-tg(a).tg(b)}$
$tg(a-b) = \frac{tg(a)-tg(b)}{1+tg(a).tg(b)}$

Resumo de arcos ou ângulos complementares:

$sen\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\cos(\alpha)$	$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=sen(\alpha)$
$tg\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=cotg(\alpha)$	$cotg\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=tg(\alpha)$
$sec\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\mathrm{cos}sec(\alpha)$	$\mathrm{cos}sec\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=sec(\alpha)$

Exercícios

01) Conhecidos sen x = $\frac{3}{5}$, onde 0 < x < $\frac{\pi}{2}$, e cos y = $\frac{1}{3}$, $\frac{3\pi}{2} < y < 2\pi$, calcule seno, cosseno e tangente de x+y e de x - y.

02) Calcule $sen\ 105^o$, $cos\ 105^o$ e $tg\ 105^o$, utilizando os senos, cossenos e tangentes de 60^o e 45^o.

03) Demonstre a identidade:

$$cos(a+b).\ cos(a-b)\ = (cos(a))^2 - (sen(b))^2$$

04) Simplifique a expressão:

$$y = \frac{sen 10°\ .\cos(-50°)\ .tg\ 65°}{\cos(-80°)\ .sen(-40°)\ .cotg(25°)}$$

05) Sendo x um arco qualquer, calcule o valor da expressão:

$$y = sen^2\left(\frac{\pi}{6} - x\right) + sen^2\left(\frac{\pi}{3} + x\right)$$

06) Sendo x e y dois arcos complementares tais que sen x - sen y = m, calcule o produto sen x. sen y.

07) Calcule o valor da expressão:

$$y = sen 41°\ .sen 42°\ .sen 43°\ .sen 44°\ .sen 45°\ .sec 46°\ .sec 47°\ .sec 48°\ .sec 49°$$

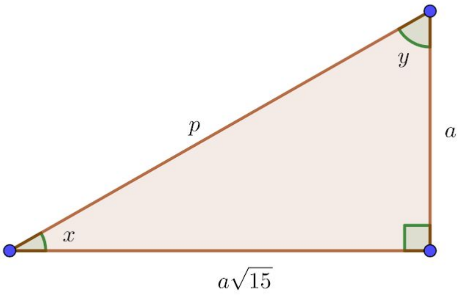
08) Sabendo que $tg\ x\ =\ 7$ e $\pi < x < \frac{3\pi}{2}$, calcule $sen\ (x + \frac{\pi}{4})$.

09) Sendo $a - b = \frac{\pi}{3}$, calcule o valor de:

$$y = (\ sen\ a\ +\ \cos b)^2 + (\ sen\ b\ -\ \cos a)^2$$

10) Dados $tg\ \alpha\ =\ 2$ e $tg\ \beta\ = 3$, calcule a soma $\alpha + \beta$ em radianos.

11) Se x e y são ângulos do triângulo retângulo da figura, calcule $tg\ (x - y)$.



12) Simplifique as expressões abaixo e, se possível, determine seu valor numérico:

a) $y = cos\ 3x.\ cos\ x\ +\ sen\ 3x.\ sen\ x$
b) $y = cos\ 65^o.\ cos\ 25^o\ +\ sen\ 65^o.\ sen\ 25^o$
c) $y = cos\ 70^o.\ cos\ 10^o\ +\ sen\ 70^o.\ sen\ 10^o$

13) Se $sen\ \alpha = \frac{2}{3}$, onde $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$, calcule $cos\ (x + \frac{\pi}{4})$.

14) Dado que $sec\ \alpha\ = 3$, e que $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$, determine:

a) $sen\ (\frac{\pi}{2} - \alpha)$
b) $cos\ (\frac{\pi}{2} - \alpha)$
c) $tg\ (\frac{\pi}{2} - \alpha)$

15) Sendo $cos\ (\frac{\pi}{4} - x)\ =\ a$, determine:

a) $cos\ (x - \frac{\pi}{4})$
b) $sen\ (\frac{\pi}{4} + x)$

16) Simplifique as expressões:

$$(a)\ y = \frac{sen\ x . \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + sen\left(\frac{\pi}{2} - x\right) . \cos\ (-x)}{1 - tg\ (-x)\ .cotg\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}$$

$$(b)\ y = \frac{\cos\ (a - b)\ .tg\left(\frac{\pi}{12} - x\right)}{\cos\ (b - a)\ .cotg\left(\frac{5\pi}{12} + x\right)}$$

17) Calcule o valor da expressão:

$$y = tg1° \cdot tg2° \cdot tg3° \ldots\ldots tg88° \cdot tg89°$$

18) Calcule $sen\ 105°$ e $tg\ 15°$.

19) Simplifique as expressões abaixo:

a) $sen\ (\pi - x)$
b) $cos\ (\pi - x)$
c) $tg\ (\pi - x)$
d) $sen\ (\pi + x)$
e) $cos\ (\pi + x)$
f) $tg\ (\pi + x)$
g) $sen\ (2\pi - x)$
h) $cos\ (2\pi - x)$
i) $tg\ (2\pi - x)$

20) Determine seno, cosseno e tangente de $(\frac{\pi}{2} + x)$, $(\frac{3\pi}{2} - x)$ e $(\frac{3\pi}{2} + x)$.

21) Simplifique as expressões:

$$(a)\ \ y = \frac{sen\ (2\pi - \alpha)\ .tg\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right).cotg\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right)}{\cos\ (2\pi + \alpha)\ .tg\ (\pi + \alpha)}$$

$$(b)\ \ y = \frac{sen\ (\pi - \alpha)\ .\cos\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) + sen\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right).\cos\ (\pi + \alpha)}{\cos\ (\pi - \alpha)\ .\cos\ (2\pi - \alpha) - sen\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right).sen\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)}$$

22) Se $tg\ 35°$ = a, calcule:

$$y = \frac{tg\ 215° - tg125°}{tg\ 235° + tg\ 325°}$$

23) Avalie a expressão: $(a)\ E = sen0° + sen1° + sen2° + \ldots + sen360°$ $(b)\ E = \cos 20° + \cos 40° + \cos 60° + \ldots + \cos 180°$

Arco duplo

Uma aplicação do arco soma, são as fórmulas dos arcos duplos.

$$\boxed{sen(2x) = 2.sen(x).cos(x)}$$

$$\boxed{cos(2x) = cos^2(x) - sen^2(x)}$$

$$\boxed{tg(2x) = \frac{2tg(x)}{1 - tg^2(x)}}$$

Podemos escrever $cos\,(2x)$ em função de $sen\,(x)$ ou $cos\,(x)$.

Basta usar a relação: $sen^2(x)\ +\ cos^2(x)\ = 1$.

Achamos as relações:

$$\boxed{cos(2a) = 2.cos^2(a) - 1}$$

$$\boxed{cos(2a) = 1 - 2.sen^2(a)}$$

Exercícios

01) Determine $sen\,(2a)$, dados $sen\,(a)\ = \frac{1}{3}$ e $\frac{\pi}{2} < a < \pi$.
02) Determine $cos\,(2a)$, dado $sen\,(a)\ = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$.
03) Determine $tg\,(4x)$, dados $cos\,(x) = \frac{\sqrt{3}}{3}$ e $0 < x < \frac{\pi}{2}$.

04) Determine $cos\ 38º$, dado $cos\ 19º$ = 0,95.
05) Simplifique a expressão: $y = \frac{sen(4x)}{sen(x).\cos(2x)}$
06) Se $cos\ (2x) = a$, determine o valor de $sen\ (x)\ e\ cos\ (x)$.
07) Se $sen\ (17º) = m$, calcule $cos\ (34º)$.